

## Modelo MILP para el tratamiento simultáneo de las operaciones de producción y distribución en plantas batch multiproducto

Aldana Tibaldo<sup>1</sup>, Jorge Marcelo Montagna<sup>1</sup>, Yanina Fumero<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Desarrollo y Diseño, CONICET-UTN, Avellaneda 3657, S3002GJC Santa Fe, Argentina  
{aldanatibaldo, mmontagna, yfumero}@santafe-conicet.gov.ar  
<http://www.ingar.santafe-conicet.gov.ar/>

**Resumen.** En este trabajo se presenta un modelo de programación mixta-entera lineal que resuelve simultáneamente los problemas de batching y scheduling de la producción y distribución en una instalación batch monoetapa, con múltiples unidades no idénticas operando en paralelo. El modelo desarrollado permite determinar la programación detallada de la producción: cantidad y tamaño de los lotes a producir, su asignación y secuenciamiento en las unidades, y los tiempos de inicio y finalización para el procesamiento de estos lotes, como así también las decisiones relativas a la distribución de los productos finales: número y tipo de vehículos a utilizar, asignación de los lotes a los vehículos, tiempo de partida y ruteo de cada vehículo y tiempos de entrega a los clientes. La capacidad del enfoque propuesto es evaluada mediante un caso de estudio y los vínculos entre las diferentes decisiones son especialmente analizados.

### 1 Introducción

En industrias manufactureras, el scheduling de la producción y la distribución son dos actividades que están sumamente interrelacionadas, ya que esta última sólo puede comenzar después de que se completen determinadas tareas del proceso de producción. Una gestión integrada de estas actividades constituye una herramienta clave para lograr mayor eficiencia en las operaciones de las firmas. Esta integración resulta sumamente valiosa frente a la alta variabilidad de los mercados, la que obliga a prestar mayor atención a la fabricación de productos customizados, o en el caso de industrias que involucran productos perecederos o con vida útil muy limitada, los cuales requieren que las actividades de producción y distribución sean cada vez más flexibles y sincronizadas. En estos ambientes, los productos finales deben entregarse a los clientes poco después de su producción. Sin embargo, a nivel operativo, la integración de las actividades de producción y distribución ha sido escasamente explorada, resultando, en general, en el planteo de los problemas de forma separada y secuencial [1], [2], [3]. Estos enfoques, basados en la optimización de cada problema de forma independiente, ignora los requisitos y limitaciones del otro y no lleva a la solución óptima, pudiendo incluso no satisfacer las expectativas de los clientes.

La resolución simultánea de estos problemas se presenta como un gran desafío teniendo en cuenta que ambos son de complejidad combinatoria, y que el desarrollo de

representaciones que integren las decisiones de producción y distribución puede conducir a modelos intratables desde el punto de vista computacional, dado el gran número de variables de decisión involucradas.

En la literatura del área, los escasos trabajos que han integrado los problemas de scheduling de la producción y distribución han considerado ciertas limitaciones y simplificaciones para las decisiones operativas involucradas. La mayoría de las contribuciones sobre esta problemática, utilizan medidas de desempeño comunes, en general de tipo económicas, las cuáles muchas veces no son capaces de representar con fidelidad los objetivos de los distintos actores involucrados. Además, dada la complejidad de estos problemas para encontrar soluciones en tiempos de cómputo razonables, han recurrido al uso de enfoques aproximados, tales como algoritmos de descomposición y heurísticos, y no a metodologías exactas. Devapriya y col. [4] coordinan las actividades de producción y distribución de manera simplificada, para el caso de una planta de producción con una única unidad destinada a la elaboración de un producto con vida útil muy limitada y donde la capacidad de la planta es suficiente para satisfacer la demanda total de los clientes dentro del horizonte de planificación. Para la distribución cuenta con una flota homogénea de vehículos, donde cada vehículo debe recorrer una ruta específica. Los clientes solo pueden realizar un único pedido en el horizonte de tiempo considerado y no se permiten entregas parciales, con lo cual cada cliente es visitado una única vez. Si bien los autores presentan una formulación matemática del problema, utilizan enfoques heurísticos basados en el uso de algoritmos genéticos para lograr soluciones aproximadas. Por otra parte, Cóccola y col. [5] han presentado un modelo de programación lineal mixta-entera (MILP) que integra las actividades de batching y scheduling de la producción y distribución considerando múltiples plantas de producción por lotes, de una única etapa, las cuales cuentan con diversas unidades no idénticas en paralelo. Los clientes pueden realizar un único pedido en el horizonte de tiempo y éste puede contener un mix de productos. Los lotes de producto final pueden ser transportados a centros de distribución para su posterior almacenamiento o ser inmediatamente asignados a los vehículos para su distribución a los usuarios finales. Una limitante del problema, y que es reflejada en las decisiones de distribución de los pedidos, es que cada cliente puede ser visitado una única vez, con lo cual la demanda de éste debe poder asignarse de manera completa en un camión. Más recientemente, Noroozi y col. ([6], [7]) proponen modelos MILP dónde cada cliente puede realizar diversos pedidos con diferentes fechas de entrega límite, los cuáles son procesados en una planta manufacturera monoetapa que opera con una única máquina. Los autores no consideran el batching de las órdenes con lo cual los tamaños de las mismas son admisibles para su procesamiento total en la unidad productiva. Las decisiones de distribución sólo consideran la asignación de órdenes de un mismo cliente a cada vehículo, y la entrega a los clientes se realiza de manera directa. Ambos trabajos, presentan enfoques de resolución heurísticos basados en algoritmos genéticos. Finalmente, el trabajo presentado por Kesen y Bektas [8] presenta formulaciones MILP integrando las decisiones de producción y distribución bajo los siguientes supuestos: cada cliente realiza un único pedido en el horizonte de planificación, el cual debe ser entregado en una ventana o intervalo de tiempo establecido por el cliente; los pedidos son procesados en una planta manufacturera monoetapa que opera con máquinas idénticas en paralelo; y se cuenta con una flota homogénea de camiones para el envío de las órdenes. Se consideran tres casos de entrega a

los clientes: cuando el vehículo llega a la locación del cliente dentro de la ventana de tiempo establecida, cuando el vehículo llega antes del comienzo del intervalo, generando una entrega temprana, y cuando el vehículo llega después, generando una tardanza. Las situaciones no deseadas son penalizadas, buscando como objetivo entregar a tiempo.

En este trabajo se propone un modelo MILP que resuelve simultáneamente la programación de la producción y distribución para el caso de una instalación batch multiproducto monoetapa con múltiples unidades no idénticas operando en paralelo, donde para las operaciones de transporte se cuenta con una flota heterogénea de vehículos de diferentes capacidades y costos asociados. Se debe satisfacer el total de órdenes que emiten los clientes para cada intervalo de caducidad dado, minimizando los costos totales. Las capacidades del enfoque propuesto son ilustradas a través de un caso de estudio. Finalmente, se resuelve el mismo ejemplo bajo un enfoque secuencial y se comparan las soluciones óptimas halladas en ambas propuestas.

## 2 Descripción del problema

El problema considerado en este trabajo se plantea sobre una planta de producción por lotes de estructura conocida, la cual establece ventanas de tiempo o caducidad  $d \in D$  en las que cada cliente  $i \in IC$  puede solicitar la entrega de sus pedidos. De esta manera, se genera un acuerdo mutuo entre la planta y los clientes, en el cual la empresa se compromete a entregar los pedidos que los clientes han realizado para cada ventana de tiempo  $d$  dentro de su intervalo de duración  $[a_d, c_d]$ . Los pedidos, que pueden contener un mix de productos  $p \in P$ , son procesados en una instalación batch monoetapa que cuenta con múltiples unidades  $m \in M$  no idénticas que operan en paralelo, las cuales poseen diferentes capacidades, tiempos y costos de procesamiento según el tipo de producto que se procese. Estos parámetros son datos del problema y se representan bajo la siguiente nomenclatura:  $capmax_{m,p}$  y  $capmin_{m,p}$  definen las capacidades máxima y mínima de la unidad  $m$  para el procesamiento del producto  $p$ ,  $fpt_{m,p}$  es el tiempo de procesamiento fijo de cada lote de producto  $p$  en la unidad  $m$ , y  $fpc_{m,p}$  es el costo de procesamiento de un lote de producto  $p$  en la unidad  $m$ .

Cada cliente puede realizar un pedido, compuesto por uno o varios productos, en cada ventana de tiempo  $d$ . Así, la cantidad de producto  $p$  demandada por el cliente  $i$  en la ventana de tiempo  $d$ , representada por  $dem_{i,p,d}$ , es un parámetro del problema. Para satisfacer la demanda de los clientes y lograr un mejor aprovechamiento de los equipos, cada lote  $b \in B_p$  de producto  $p$  puede utilizarse para satisfacer diferentes pedidos que demanden ese producto. Dado que el número de lotes de cada producto, como así también sus tamaños, son variables del problema, se deben proponer cotas adecuadas para las mismas a fin de facilitar la solución del problema. Considerando las demandas totales de producto  $p$  sobre todas las ventanas de tiempo, y la capacidad mínima exigida para el procesamiento del producto  $p$  en la unidad  $m$ , es posible calcular el número máximo de lotes de producto  $p$  que se pueden procesar en la unidad  $m$  para satisfacer los pedidos de los clientes,  $NB_{m,p}^{UP}$ , mediante la expresión (1).

$$NB_{m,p}^{UP} = \left\lceil \frac{\sum_{i \in IC} \sum_{d \in D} dem_{i,p,d}}{capmin_{m,p}} \right\rceil \quad (1)$$

Para las decisiones de scheduling de la producción se utiliza una representación basada en ranuras de tiempo (“time-slots”), en las que los lotes a procesar serán asignados. Para ello, se debe proponer un número adecuado de intervalos de tiempo (slots) para cada una de las unidades que integran la planta, denotado por  $L_m$ , lo que muchas veces no resulta una decisión trivial. Los tiempos de inicio y duración de cada slot son desconocidos y son parte de la solución del problema. Claramente, teniendo en cuenta la posibilidad de que ocurra el caso extremo en el que todos los lotes de producto se procesen en una misma unidad, este número se define como la sumatoria en  $p$  de los parámetros  $NB_{m,p}^{UP}$ . De acuerdo a las ventanas de tiempo propuestas y los tiempos de procesamiento de los productos, este parámetro puede resultar en una sobrestimación afectando de manera directa la performance del problema. En consecuencia, considerando la información relativa a estos datos del problema, un valor más ajustado para este parámetro puede ser propuesto.

Para realizar la entrega de los pedidos, la planta cuenta con una flota heterogénea de vehículos  $v \in V$ , los cuales están agrupados en diferentes tipos de vehículos  $vt \in VT$ , según las características que comparten tales como las capacidades y los costos de transporte. Para que un vehículo pueda ser utilizado, el total de la mercadería a transportar no debe exceder la capacidad máxima admisible,  $cap_{vt}$ , y a su vez, debe superar un porcentaje mínimo de ocupación denotado por  $prc_{vt}$ . La distancia entre los diferentes clientes y la planta,  $dist_{i,j}$  con  $i, j \in IC$ , es un dato del problema. En cambio, el tiempo de viaje no es un valor explícitamente dado, pero se calcula como el cociente entre la distancia anteriormente mencionada y la velocidad admisible de los vehículos. El tiempo de carga y descarga de los productos es independiente del tamaño del pedido y está incluido en el tiempo de viaje. El costo de transporte,  $tc_{i,j,vt}$ , también es un dato del problema y es expresado como una función dependiente del tipo de vehículo, la distancia recorrida y el peso transportado. Dentro del horizonte de tiempo establecido, cada vehículo que se utilice solo puede realizar un viaje, y está inicialmente estacionado en la planta de producción. En cada vehículo se pueden cargar pedidos de diferentes clientes, pero cada pedido asociado a una ventana de tiempo debe ser entregado de manera completa en un único vehículo, no permitiendo así entregas parciales. De esta manera, en cada vehículo, se consolidan los lotes o partes de lotes necesarios para completar cada pedido que distribuya este camión. Para cada vehículo que se seleccione, la secuencia de clientes-ventanas de tiempo que debe ser visitada es una variable del modelo. Estas decisiones de ruteo son representadas mediante la noción de precedencia inmediata.

Finalmente, bajo los supuestos anteriormente mencionados, el problema consiste en determinar, el programa de producción óptimo que contemple el número, tamaño, asignación, secuenciación y temporización detallada de los lotes a procesar en cada unidad de la planta, y el plan de distribución que indique los vehículos a utilizar, la asignación de pedidos a cada unidad de transporte, la ruta y la temporización precisa

de los clientes visitados por cada vehículo, a fin de minimizar el costo total de las operaciones de producción y distribución.

### 3 Formulación del problema

El modelo propuesto resuelve simultáneamente los problemas de batching, y scheduling de la producción y distribución para una instalación batch multiproducto monoetapa, con unidades no idénticas operando en paralelo. Esta sección se divide en tres subsecciones: en la primera son presentadas las restricciones de producción, luego las restricciones relativas a la distribución, y finalmente la función objetivo del problema.

#### 3.1 Restricciones de batching y scheduling de la producción

Se define la variable continua  $BS_{b,p}$ , la cual representa el tamaño del lote  $b$  de producto  $p$ , y a través de la ecuación (2) se garantiza que, de cada producto, se produzca exactamente el total demandado por los clientes.

$$\sum_{b \in B_p} BS_{b,p} = \sum_{i \in IC} \sum_{d \in D} dem_{i,p,d} \quad \forall p \in P \quad (2)$$

La variable binaria  $X_{b,p,m,l}$  establece que, en caso de tomar el valor 1, el lote  $b$  de producto  $p$  es procesado en el slot  $l$  de la unidad  $m$ . Entonces, mediante las ecuaciones (3) y (4) se establecen las cotas máxima y mínima para el tamaño de cada lote.

$$BS_{b,p} \leq \sum_{m \in M} \sum_{1 \leq l \leq L_m} capmax_{m,p} X_{b,p,m,l} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P \quad (3)$$

$$BS_{b,p} \geq \sum_{m \in M} \sum_{1 \leq l \leq L_m} capmin_{m,p} X_{b,p,m,l} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P \quad (4)$$

A continuación, la ec. (5) garantiza que los lotes deben ser asignados a lo sumo a un slot de un equipo, mientras que la ec. (6) determina que en cada slot de un equipo no se puede procesar más de un lote de producto a la vez.

$$\sum_{m \in M} \sum_{1 \leq l \leq L_m} X_{b,p,m,l} \leq 1 \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P \quad (5)$$

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} X_{b,p,m,l} \leq 1 \quad \forall m \in M, \forall 1 \leq l \leq L_m \quad (6)$$

Para evitar soluciones alternativas, la ecuación (7) asegura que los slots de cada unidad sean utilizados en orden creciente, mientras que la ecuación (8) establece lo propio para los lotes de producto  $p$  que sean seleccionados para su procesamiento.

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} X_{b,p,m,l} \geq \sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} X_{b,p,m,l+1} \quad \forall m \in M, \forall 1 \leq l < L_m \quad (7)$$

$$\sum_{m \in M} \sum_{1 \leq l \leq L_m} X_{b,p,m,l} \leq \sum_{m \in M} \sum_{1 \leq l \leq L_m} X_{b+1,p,m,l} \quad \forall b, b+1 \in B_p, \forall p \in P \quad (8)$$

Por otro lado, con las ecuaciones (9) y (10) se eliminan soluciones simétricas proponiendo que la denominación de los lotes de producto  $p$  que sean asignados en una misma unidad sigan un orden ascendente respecto de los slots en los que son asignados, como así también respecto de las unidades utilizadas.

$$\sum_{l' < l} X_{b,p,m,l'} \geq X_{b+1,p,m,l} \quad \forall b, b+1 \in B_p, \forall p \in P, \forall 1 \leq l \leq L_m \quad (9)$$

$$\sum_{l' < l} X_{b,p,m,l'} + \sum_{m' < m} \sum_{1 \leq l'' \leq L_{m'}} X_{b,p,m',l''} \geq X_{b+1,p,m,l} \quad (10)$$

$$\forall b, b+1 \in B_p, \forall p \in P, \forall m \in M / m \neq m_1, \forall 1 \leq l \leq L_m$$

Se utiliza una representación de tiempo continuo para determinar los momentos exactos en los que tienen lugar los eventos. Se definen las variables continuas  $ST_{m,l}$  y  $FT_{m,l}$ , que representan el tiempo inicial y final de procesamiento del slot  $l$  en la unidad  $m$ , respectivamente. El vínculo entre ellas se establece en la ec. (11).

$$FT_{m,l} = ST_{m,l} + fpt_{m,p} X_{b,p,m,l} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall m \in M, \forall 1 \leq l \leq L_m \quad (11)$$

Para evitar la superposición entre los tiempos de procesamiento de diferentes slots en cada unidad, se agrega la ec. (12). Además, si ningún lote es asignado al slot  $l+1$  de la unidad  $m$ , su tiempo inicial es igual al tiempo final del slot  $l$  (ec.13).

$$FT_{m,l} \leq ST_{m,(l+1)} \quad \forall m \in M, \forall 1 \leq l < L_m \quad (12)$$

$$FT_{m,l} \geq ST_{m,(l+1)} - M_l \sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} X_{b,p,m,l+1} \quad \forall m \in M, \forall 1 \leq l < L_m \quad (13)$$

donde  $M_l$  es un escalar suficientemente grande.

### 3.2 Restricciones de distribución

Teniendo en cuenta que cada lote de producto puede ser utilizado parcialmente para satisfacer pedidos que son distribuidos en diferentes vehículos, se define la variable binaria  $R_{b,p,v}$  que indica si el lote  $b$  del producto  $p$  es asignado al vehículo  $v$ , y la variable continua  $QT_{b,p,v}$  que representa la cantidad de unidades de ese lote que son cargadas en el vehículo. La variable binaria  $W_v$  indica si el vehículo  $v$  es o no utilizado. Se define el conjunto  $VVT_{vt}$  que contiene los vehículos del tipo  $vt$ . Las restricciones (14) y (15) garantizan que la cantidad total de unidades asignadas a cada vehículo supere la capacidad mínima exigible del vehículo, pero no exceda su capacidad máxima, respectivamente. En ambas ecuaciones, el término derecho está multiplicado por el escalar  $\alpha_p$ , el cual es un factor que determina la relación que existe entre unida-

des de producto final y su peso, dado que la capacidad de cada vehículo está dada en unidades de peso.

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} QT_{b,p,v} \geq prc_{vt} cap_{vt} \alpha_p W_v \quad \forall v \in VVT_{vt}, vt \in VT \quad (14)$$

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} QT_{b,p,v} \leq cap_{vt} \alpha_p W_v \quad \forall v \in VVT_{vt}, vt \in VT \quad (15)$$

El total de unidades asignadas a los vehículos debe ser igual al total de unidades demandadas por los clientes. Se define la variable binaria  $Z_{i,d,v}$ , que determina si el pedido del cliente  $i$  para la ventana de caducidad  $d$  es asignado al vehículo  $v$ . Dado que no se admiten entregas parciales de pedidos, lo solicitado por cada cliente en una ventana de tiempo debe enviarse en un único vehículo, ec. (16). Así, la ec. (17) garantiza que a todos los clientes que sean visitados en la ventana de tiempo  $d$  por el vehículo  $v$  se les entregue la cantidad total de unidades que componen su pedido. A través de esta restricción se permite transportar en un mismo vehículo los pedidos de diferentes clientes.

$$\sum_{v \in V} Z_{i,d,v} \leq 1 \quad \forall i \in IC, \forall d \in D \quad (16)$$

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} QT_{b,p,v} = \sum_{i \in IC} \sum_{d \in D} dem_{i,p,d} Z_{i,d,v} \quad \forall v \in V \quad (17)$$

La ec. (18) asegura que el total de unidades que componen el lote  $b$  del producto  $p$  sean cargadas en los vehículos, mientras que la ec. (19) hace que la variable  $QT_{b,p,v}$  sea igual a cero si el lote  $b$  del producto  $p$  no es asignado al vehículo  $v$  ( $R_{b,p,v} = 0$ ).

$$\sum_{v \in V} QT_{b,p,v} = BS_{b,p} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P \quad (18)$$

$$QT_{b,p,v} \leq \max_m \{ cap \max_{m,p} \} R_{b,p,v} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall v \in V \quad (19)$$

Para las decisiones de ruteo, que establecen el secuenciamiento entre los clientes, se definen las siguientes variables binarias:  $ZP_{i,v}$  es igual a 1 si el cliente  $i$  es el primero en ser visitado en el recorrido del vehículo  $v$ ,  $Y_{i,j,v}$  es igual a 1 si al cliente  $i$  se le entrega inmediatamente antes del cliente  $j$  con el camión  $v$ , y finalmente  $ZU_{i,v}$  cuyo valor es 1 si el cliente  $i$  es el último en la ruta del vehículo  $v$ , y cero en caso contrario. Cada vehículo que se utiliza debe tener asignado un cliente que sea el primero en visitar y uno que sea el último (ecs. 20 y 21).

$$\sum_{i \in IC} ZP_{i,v} = W_v \quad \forall v \in V \quad (20)$$

$$\sum_{i \in IC} ZU_{i,v} = W_v \quad \forall v \in V \quad (21)$$

Sin embargo, para que el cliente  $i$  pueda ser el primero o último en visitarse en la ruta del vehículo  $v$ , a este cliente se le debe entregar, con el vehículo  $v$ , lo solicitado en al menos una ventana de caducidad (ecs. 22 y 23).

$$ZP_{i,v} \leq \sum_{d \in D} Z_{i,d,v} \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (22)$$

$$ZU_{i,v} \leq \sum_{d \in D} Z_{i,d,v} \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (23)$$

Las restricciones (24) y (25) establecen que, si la demanda del cliente  $i$  en la ventana de tiempo  $d$  es entregada con el vehículo  $v$ , entonces el cliente  $i$  o es el primero de la ruta de  $v$  o bien tendrá un único precedente. De forma similar, las restricciones (26) y (27) determinan que, si el pedido del cliente  $i$  para la ventana  $d$  es entregado por  $v$ , el cliente  $i$  será el último del recorrido o, caso contrario, tendrá un único sucesor.

$$ZP_{i,v} + \sum_{j \in IC} Y_{j,i,v} \geq Z_{i,d,v} \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (24)$$

$$ZP_{i,v} + \sum_{j \in IC} Y_{j,i,v} + Z_{i,d,v} \leq 2 \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (25)$$

$$ZU_{i,v} + \sum_{j \in IC} Y_{i,j,v} \geq Z_{i,d,v} \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (26)$$

$$ZU_{i,v} + \sum_{j \in IC} Y_{i,j,v} + Z_{i,d,v} \leq 2 \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (27)$$

La restricción (28) garantiza que la relación de precedencia entre dos clientes en un mismo vehículo debe ser única, mientras que las restricciones (29) y (30) aseguran que si el cliente  $i$  no es visitado con el vehículo  $v$ , entonces no existe ninguna relación de precedencia (antecesor-sucesor) con este cliente para dicho vehículo.

$$Y_{i,j,v} + Y_{j,i,v} \leq 1 \quad \forall i, j \in IC / i \neq j, \forall v \in V \quad (28)$$

$$Y_{i,j,v} \leq \sum_{d \in D} Z_{i,d,v} \quad \forall i, j \in IC / i \neq j, \forall v \in V \quad (29)$$

$$Y_{j,i,v} \leq \sum_{d \in D} Z_{i,d,v} \quad \forall i, j \in IC / i \neq j, \forall v \in V \quad (30)$$

Las ecuaciones (31), (32) y (33) imponen el valor cero para las variables  $R_{b,p,v}$ ,  $Z_{i,d,v}$  e  $Y_{i,j,v}$  si el vehículo  $v$  no es usado. A fin de reducir el espacio de búsqueda, la ec. (34) asegura que los vehículos de un mismo tipo sean utilizados en orden ascendente.

$$R_{b,p,v} \leq W_v \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall v \in V \quad (31)$$

$$Z_{i,d,v} \leq W_v \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (32)$$

$$Y_{i,j,v} \leq W_v \quad \forall i, j \in IC / i \neq j, \forall v \in V \quad (33)$$

$$W_v \geq W_{v+1} \quad \forall v, v+1 \in VVT_v, v \in VT \quad (34)$$

Para las restricciones de tiempo se definen las siguientes variables continuas:  $DT_v$  que representa el tiempo de partida del vehículo  $v$ , y  $DET_{i,v}$  que indica el tiempo de arribo al cliente  $i$  en el vehículo  $v$ .

El tiempo de partida de cada vehículo  $v$  que sea usado dependerá del mayor tiempo de finalización de todos los lotes asignados a él. Para modelar esta condición se utiliza una restricción Big-M, ec. (35), donde el escalar  $M_2$  representa el extremo superior máximo entre todas las ventanas de tiempos consideradas, y hace que la ecuación resulte redundante si alguna de las variables  $X_{b,p,m,l}$  o  $R_{b,p,v}$  es nula. Por otro lado, para los vehículos que no son usados, este tiempo se define igual a cero, ec. (36), donde  $M_3$  es la diferencia entre  $M_2$  y el mínimo tiempo de viaje entre un cliente y la planta.

$$DT_v \geq FT_{m,l} - M_2(2 - X_{b,p,m,l} - R_{b,p,v}) \quad \forall m \in M, \forall p \in P, \forall 1 \leq l \leq L_m, \forall v \in V \quad (35)$$

$$DT_v \leq M_3 W_v \quad \forall v \in V \quad (36)$$

El tiempo de partida de cada vehículo condicionará el tiempo de entrega a cada cliente. Si el cliente  $i$  es el primero visitado en la ruta del vehículo  $v$ , el tiempo de entrega se define por las ecuaciones (37) y (38), donde  $i1$  representa la planta de producción. En el caso que  $ZP_{i,v} = 0$ , se utilizan escalares adecuados que aseguran que estas ecuaciones resultan redundantes ( $M_4 = M_2 + \max_i \{tv_{i,i1}\}$ ).

$$DET_{i,v} \geq DT_v + tv_{i1,i} - M_4(1 - ZP_{i,v}) \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (37)$$

$$DET_{i,v} \leq DT_v + tv_{i1,i} + M_2(1 - ZP_{i,v}) \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (38)$$

Si el cliente  $j$  es precedido por el cliente  $i$  en la ruta de  $v$ , el tiempo de entrega al cliente  $j$  será igual al tiempo de entrega de su predecesor más el tiempo de viaje entre ellos (ecuaciones 39 y 40). Nótese que las restricciones (37)-(40) garantizan que los vehículos utilizados no presenten tiempo ocioso en su recorrido.

$$DET_{j,v} \geq DET_{i,v} + tv_{i,j} - M_4(1 - Y_{i,j,v}) \quad \forall i, j \in IC, \forall v \in V \quad (39)$$

$$DET_{j,v} \leq DET_{i,v} + tv_{i,j} + M_2(1 - Y_{i,j,v}) \quad \forall i, j \in IC, \forall v \in V \quad (40)$$

No obstante, los pedidos realizados por los clientes deben ser entregados dentro de los límites de la ventana de tiempo  $d$  correspondiente (ecs. 41 y 42).

$$DET_{i,v} \geq a_d W_v + M_2(1 - Z_{i,d,v}) \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (41)$$

$$DET_{i,v} \leq c_d W_v + M_2(1 - Z_{i,d,v}) \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (42)$$

La restricción (43) garantiza que, si no se entregan pedidos al cliente  $i$  con el vehículo  $v$ , el tiempo de entrega debe ser igual a cero. Más aún, para aquellos vehículos que no son utilizados, este tiempo se fija igual a cero para todos los clientes (ec. 44).

$$DET_{i,v} \leq M_2 \sum_{d \in D} Z_{i,d,v} \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (43)$$

$$DET_{i,v} \leq M_2 W_v \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (44)$$

### 3.3 Función Objetivo

La función objetivo es la minimización del costo operativo total (ec. 45) dado por: los costos de producción (ec. 46), y los costos de distribución (ec. 47).

$$\text{Minimizar } (CPROD + CTRANS) \quad (45)$$

$$CPROD = \sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} \sum_{m \in M} \sum_{1 \leq l \leq L_m} fpc_{m,p} X_{b,p,m,l} \quad (46)$$

$$CTTRANS = \sum_{j \in IC} \sum_{v \in VT} \sum_{v \in V} (tc_{i,j,v} ZP_{j,v} Q_{j,v}) + \sum_{i \in IC} \sum_{j \in IC} \sum_{v \in VT} \sum_{v \in V} (tc_{i,j,v} Y_{i,j,v} Q_{j,v}) \\ + \sum_{i \in IC} \sum_{v \in VT} \sum_{v \in V} (tc_{i,i,v} ZU_{i,v}) \quad (47)$$

$Q_{i,v}$  representa la cantidad total de producto final, en unidades de peso, que se le entrega al cliente  $i$  en el vehículo  $v$  (ec. 48):

$$\sum_{p \in P} \sum_{d \in D} dem_{i,p,d} \alpha_p Z_{i,d,v} = Q_{i,v} \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (48)$$

En cuanto a los costos de producción, se considera un costo de procesamiento fijo para producir cada lote que depende del producto y unidad en la que se elabore. Para los costos de distribución, se propuso una función de aproximación por partes donde las tarifas se basan en una combinación de distancia, peso transportado y tipo de vehículo. Entonces, dependiendo de la distancia a la que se encuentren los clientes, se usa la estimación correspondiente para el costo de transporte, en \$/kg. Para evitar la no linealidad de los términos  $ZP_{j,v} Q_{j,v}$  y  $Y_{i,j,v} Q_{j,v}$  se introducen las variables continuas  $ZPQ_{i,v}$  y  $YQ_{i,j,v}$ , respectivamente. Las restricciones asociadas a estas variables no se presentan por razones de espacio, pero el lector interesado puede solicitarlas a los autores.

## 4 Caso de estudio

Para mostrar las capacidades del enfoque propuesto, se presenta un caso de estudio. Se considera una planta que opera con 3 unidades no idénticas en paralelo, las cuales pueden producir 3 productos. La planta ofrece la posibilidad de entregar los pedidos en tres diferentes ventanas de tiempo  $d1$ ,  $d2$ ,  $d3$ , cuyos intervalos (en horas) son: [7, 9], [9, 11], [11, 13]. El ejemplo contempla 7 clientes, quienes deciden en cuál/es de las tres ventanas disponibles desean que sus pedidos sean entregados. Se cuenta con 3 tipos de vehículos heterogéneos y cada tipo dispone de 1, 2 y 3 vehículos, respectivamente. El ejemplo fue implementado y resuelto en GAMS 24.7.3, mediante el solver CPLEX 12.6, en un procesador Intel Core i7, 3.20 GHz y 16 GB de RAM. El problema generado tiene 7174 restricciones, 636 variables continuas y 1014 variables binarias, y la resolución del mismo demandó un tiempo de CPU de 262 segundos, con 0% gap. Por razones de espacio, no se suministran las tablas de datos del problema, pero en las Tablas 1 y 2 y en Figura 1, se puede visualizar la solución óptima hallada.

En la Tabla 1, se muestran los slots empleados en cada unidad, sus tiempos de inicio y finalización, los lotes de producto procesados en cada uno de ellos, el tamaño de los lotes y los porcentajes de utilización de las unidades para cada lote procesado. La Tabla 2 muestra los vehículos utilizados según el tipo, el tiempo de partida de cada vehículo, la ruta a recorrer (clientes a visitar y ventana de tiempo que se entrega), la hora de entrega a cada cliente visitado y el porcentaje de utilización del vehículo.

La Figura 1 muestra el diagrama de Gantt que refleja el scheduling de la producción y de la distribución obtenido para el caso de estudio presentado. En la parte superior se muestra el scheduling de la producción para cada unidad de procesamiento (M1, M2 y M3), en la mitad de la figura, en color rojo, se marcan las tres ventanas de tiempo ( $d1$ ,  $d2$  y  $d3$ ), y en el parte inferior, se muestra el scheduling de la distribución para cada vehículo seleccionado: V1, V4, V5 y V6. Para comprender mejor la información ilustrada, se toma como ejemplo la unidad M3 y el vehículo V4. En la primera fila correspondiente a la unidad M3, se representa la producción en 9 slots, 7 de ellos son lotes del producto P2, mientras que los 2 restantes son del producto P3. Las longitudes de los slots hacen referencia al tiempo que insumirá su procesamiento. Luego, en la fila que se encuentra inmediatamente debajo, se puede apreciar en qué vehículo se carga cada lote. Por ejemplo, el lote que se produce en la unidad M3 en el slot L1, es asignado al camión V5 (representado con color verde), mientras que el lote procesado en el slot L4 es asignado en partes a los vehículos V4 (camión naranja) y V5. El vehículo V5 parte a las 7 horas de la mañana, visitando primero al cliente  $i3$ , al cual le entrega el pedido realizado para la ventana de tiempo  $d1$  a las 11 hs., luego parte hacia el cliente  $i6$ , a quien le entrega el pedido de la ventana de tiempo  $d2$  a las 10 hs., posteriormente viaja hacia el cliente  $i5$ , a quien le entrega el pedido de las ventanas  $d2$  y  $d3$  a las 11 hs., y, por último, continúa su recorrido hacia el cliente  $i4$ , a quien le entrega lo solicitado para la ventana  $d3$ .

**Tabla 1.** Detalle del batching y scheduling de la producción.

Unidad	Slot	ST(h)	FT(h)	Lote	Producto	Tamaño(u)	% Utilización
<b>M1</b>	L1	0	2	B1	P1	120	92
	L2	2	4	B2	P1	120	92
	L3	4	6	B3	P1	124	95
	L4	6	7	B1	P3	130	100
	L5	7	9	B4	P1	130	100
	L6	9	11	B5	P1	120	12
<b>M2</b>	L1	0	2	B6	P1	140	93
	L2	2	4	B2	P3	130	100
	L3	4	6	B3	P3	120	92
	L4	6	8	B7	P1	150	100
	L5	8	10	B4	P3	130	100
<b>M3</b>	L1	0	1	B1	P2	126	97
	L2	1	2	B2	P2	115	88
	L3	2	3	B3	P2	115	88
	L4	3	4	B4	P2	130	100
	L5	4	5	B5	P2	130	100
	L6	5	6	B6	P2	120	92
	L7	6	8.5	B7	P3	135	100
	L8	8.5	11	B5	P3	135	100
	L9	11	12	B6	P2	130	100
<b>Total producido: 2550 unidades</b>							
<b>Costo Producción: \$765</b>							

**Tabla 2.** Detalle del scheduling de la distribución.

Vehículo	Tipo	Tiempo de partida (h)	Cliente	Ventana de tiempo	Tiempo de entrega (h)	% Capacidad utilizada
<b>V1</b>	VT1	12	i8	d3	13	86
			i5	d1	7	
			i7	d1	8	
<b>V4</b>	VT3	6	i3	d2	9	99
			i4	d2	11	
			i2	d3	12	
			i3	d1	9	
<b>V5</b>	VT3	7	i6	d2	10	85
			i5	d2-d3	11	
			i4	d3	13	
			i6	d3	13	
<b>V6</b>	VT3	12	i6	d3	13	82
<b>Costo Distribución: \$1674</b>						

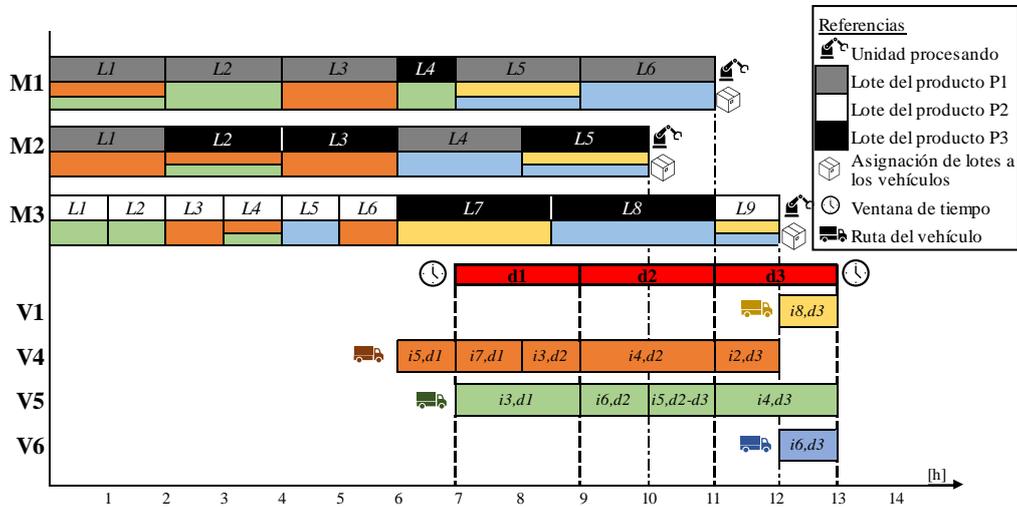


Fig. 1. Schedule de la producción y distribución para el caso de estudio.

Con fines comparativos, el caso de estudio presentado ha sido resuelto bajo un enfoque secuencial, el cual resulta de resolver en primera instancia el problema de optimización de batching y scheduling de la producción, y posteriormente el problema de scheduling de la distribución. Este es el enfoque habitualmente utilizado dada la complejidad que implica la resolución integrada de ambos problemas. Bajo este enfoque, en la solución óptima se obtiene un costo de producción levemente menor (\$760 vs. \$765), sin embargo, el costo de distribución obtenido, respecto al del problema integrado, es mayor (\$1772 vs. \$1674). La disminución del costo de producción está dada por diferentes asignaciones de los lotes a las unidades de procesamiento. Luego, la solución obtenida en esta primera instancia, conduce a diferentes asignaciones y selección de vehículos en el problema de distribución. En particular, se utiliza un vehículo de tipo VT2, el cual presenta mayor capacidad y costo de transporte que el de tipo VT1, utilizado en la optimización simultánea, y los restantes de tipo VT3 (V4, V5 y V6) continúan utilizándose, pero con modificaciones en sus rutas y cargas transportadas, las que impactan en sus costos. Así, el enfoque integrado presenta una disminución del 4% de los costos operativos totales frente al enfoque secuencial, generando una mejor solución económica para la planta manufacturera.

## 5 Conclusiones

En los últimos años, debido a los ambientes altamente competitivos, la necesidad de responder a los requerimientos de los clientes se volvió una tarea imprescindible en las empresas. Este escenario incrementó la producción de productos personalizados, tanto en lo que hace a su elaboración como a su entrega. Bajo este paradigma de operación, la principal contribución de este trabajo fue el desarrollo de un modelo MILP

que permitió integrar simultáneamente las decisiones de batching, scheduling de la producción y distribución en una planta batch multiproducto de una sola etapa con múltiples unidades. En el enfoque propuesto, cada cliente puede realizar diversos pedidos cuyas entregas pueden estar asociadas a diferentes ventanas de tiempo propuestas por la empresa y de mutuo acuerdo con los clientes. El modelo determina, simultáneamente, dónde, cómo, y cuando se procesan esas órdenes y cómo se realiza la carga y el envío de las mismas en los vehículos que hayan sido seleccionados, a fin de reducir los costos de producción y distribución, y satisfaciendo la entrega a los clientes en tiempo y forma. Un caso de estudio fue analizado para mostrar las capacidades del modelo desarrollado y su valor en contraste a un enfoque secuencial.

Como trabajos futuros, se analizará la posibilidad de incluir una estructura de planta multietapa más compleja, considerando además tiempos de set-up y costos de procesamiento dependientes del tamaño del lote a procesar, como así también un enfoque multiobjetivo, teniendo en cuenta las diferentes medidas de performance, que muchas veces resultan contrapuestas (costos, satisfacción al cliente, productividad).

## Referencias

1. Chen, Z.-L. Integrated production and outbound distribution scheduling: Review and extensions. *Operations Research*, 58 (1), (2010), 130–148.
2. Moons, S., Ramaekers, K., Caris A., Arda, Y. Integrating production scheduling and vehicle routing decisions at the operational decision level: A review and discussion. *Computers & Industrial Engineering*, 104 (2017), 224–245.
3. Kumar, L., Ganapathya, R., Gokhaleb and Tiwari, M. K. Quantitative approaches for the integration of production and distribution planning in the supply chain: a systematic literature review. *International Journal of Production Research*, Vol. 58 (2020), 3527-3553.
4. Devapriya, P., Ferrel, W., Geismar, N. Integrated production and distribution scheduling with a perishable product. *European Journal of Operational Research*, Vol. 104 (2016), 224-245.
5. Cóccola, M. E., Zamarripa, M., Méndez, C. A., España, A. Toward integrated production and distribution management in multi-echelon supply chains. *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 57 (2013), 78-94.
6. Noroozi, A., Mazdeh, M. M., Noghondarian, K., Rasti-Barzoki, M., Heydari, M. Evolutionary computation algorithms to coordinating order acceptance and batch delivery for an integrated supply chain scheduling. *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 37 (2017), 1629-1679.
7. Noroozi, A., Mohammad, M. M., Heydari, M, Rasti-Barzoki, M. Coordinating order acceptance and integrated production-distribution scheduling with batch delivery considering Third Party Logistics distribution. *Journal of Manufacturing Systems*, Vol. 46 (2018), 29-45.
8. Kesen, S. E., Bektas, T. Integrated production scheduling and distribution planning with time windows. *Lean and Green Supply Chain Management, International Series in Operations Research & Management Science*, Vol. 273 (2018), 231-252.